

Projeto de filtros para ajuste sazonal robustos a variações na sazonalidade

Marcela Cohen Martelotte¹, Reinaldo Castro Souza¹, Eduardo Antônio Barros Silva²

¹ Departamento de Engenharia Elétrica - PUC-Rio

² Programa de Engenharia Elétrica – COPPE/UFRJ

1. Introdução

Uma das funções dos órgãos oficiais de estatística é fornecer aos tomadores de decisão informações sobre a economia do país, disponibilizando séries históricas das variáveis relacionadas aos principais setores. Normalmente, a análise da evolução das variáveis econômicas é realizada com base em séries sazonalmente ajustadas. Sendo assim, a qualidade do ajuste sazonal é de fundamental importância para os analistas.

Embora o conceito de sazonalidade seja familiar, convém precisar o seu significado. Nesse sentido, adota-se a definição de Wallis e Thomas (1971, p.58): “sazonalidade é o conjunto dos movimentos, com período igual ou inferior a um ano, ‘sistemáticos, mas não necessariamente uniformes’, que ocorrem numa série temporal.”

Nessa definição, o principal aspecto a ser ressaltado é o fato do comportamento da sazonalidade poder apresentar caráter ou estável ou móvel. Quando a sazonalidade de uma série temporal permanece a mesma ao longo do tempo, tendo variação estocástica constante, ou até mesmo sem variação estocástica, ela é considerada estável (Sutradhart e Dagum, 1998). Se, por outro lado, houver mudanças graduais na amplitude da componente sazonal, fica caracterizada a presença de sazonalidade móvel (Higginson, 1975). Dessa forma, apesar da sazonalidade ser um padrão que tende a se repetir ano após ano, ele não é necessariamente constante.

A importância de analisar a sazonalidade móvel foi destacada no trabalho de Kuznets (1933), que pesquisou a natureza da mudança na amplitude sazonal em 31 séries temporais da indústria. Além disso, Kaiser (1998) analisou as situações em que a componente sazonal pode estar sujeita a alterações. Com isso, torna-se nítida a necessidade dos métodos de ajuste sazonal tratarem adequadamente essa característica das séries temporais.

Existem hoje disponíveis diversos métodos e programas de ajuste sazonal. No Brasil, o programa

utilizado pelo IBGE para ajuste sazonal é o X-12-ARIMA, cujo método de ajuste sazonal implementado é o método X-11. Tal método encontra-se, também, no programa mais atual da chamada ‘Família X’ – o X-13ARIMA-SEATS. Além do Brasil, esse método de dessazonalização é adotado por países como Inglaterra, Estados Unidos e Austrália, sendo considerado o método mais utilizado no mundo pelos órgãos oficiais de estatística (I.M.F., 2008).

Na literatura, há um grande debate comparando o X-11 aos demais métodos de ajuste sazonal, principalmente ao método TRAMO-SEATS¹, utilizado pela Espanha, e também implementado no programa X-13ARIMA-SEATS. Os resultados indicam desempenho semelhante quando a série apresenta um padrão estável de sazonalidade. Porém, quando existe sazonalidade móvel os resultados divergem, e o método X-11, amplamente utilizado, não consegue tratar a sazonalidade móvel de forma adequada (Planas, 1998).

Várias séries temporais da economia brasileira, assim como outras, apresentam um grau considerável de sazonalidade móvel. Dessa forma, é importante haver um método que tenha um bom desempenho quando utilizado para dados com essa característica.

Este trabalho se situa justamente neste contexto, propondo a construção um filtro automático de extração da componente sazonal, adequado tanto para séries com sazonalidade estável quanto para aquelas que apresentam sazonalidade móvel. Com este filtro, espera-se obter a melhoria das técnicas de ajustamento informatizadas, pois ele permitirá um ajuste adequado da sazonalidade na presença de variação de amplitude.

¹ No TRAMO-SEATS o ajuste sazonal é realizado por extração de sinal, no qual o filtro ótimo é derivado de um modelo ARIMA.

2. O Filtro Proposto: ajuste sazonal com base na extração de sinal

Para introduzir o conceito de sinal, consideraremos o modelo aditivo de decomposição da série temporal Y_t :

$$Y_t = T_t + S_t + I_t \quad [1]$$

onde T_t é a componente de Tendência, S_t é a componente Sazonal e I_t é a componente Irregular.

A componente sazonal pode ser interpretada como um sinal periódico em tempo discreto. Como estes sinais podem ser representados usando uma série de Fourier, como uma combinação linear de harmônicos de uma frequência fundamental, neste trabalho analisaremos o comportamento dos filtros para sinais senoidais. A robustez dos filtros a variações nas componentes sazonais será avaliada através de sua resposta a componentes sazonais senoidais moduladas por outro sinal senoidal, só que com período bem maior do que o período sazonal. Em se tratando de uma série temporal mensal, os sinais usados podem ser representados da seguinte forma:

$$S_t = A \left[1 + b \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{t}{k} \right) \right] \left[\cos \left(2\pi \frac{t}{12} \right) \right] \quad [2]$$

onde: A = amplitude do sinal. $A \in \mathbb{R}$; b = taxa de variação da sazonalidade. $b \in (0, 1)$; k = número de meses no qual o padrão de sazonalidade móvel volta a se repetir; t = período de tempo que compõe o trecho a ser analisado. No caso, $t = 1, 2, \dots$

Em relação aos filtros, pode-se dizer que tratam-se de operações lineares que têm por finalidade alterar o conteúdo espectral de um sinal. Por exemplo, um filtro pode eliminar as frequências não desejadas de um sinal de entrada, ou selecionar uma determinada frequência do sinal. Um filtro capaz de extrair uma sazonalidade fixa deve ser capaz de isolar as componentes de frequência na frequência sazonal e em seus harmônicos.

Em casos de sazonalidade móvel, as componentes da sazonalidade não estão exclusivamente nas frequências dos harmônicos, mas podem ser espalhar em uma faixa de frequência em torno deles. Neste caso, deseja-se um filtro que idealmente deixe passar sem distorção qualquer frequência pertencente a uma faixa de passagem em torno dos harmônicos, e rejeite as demais. O filtro proposto possui justamente esta característica. É importante que ele seja projetado de modo que o seu desempenho para a extração da sazonalidade fixa seja equivalente ao do X-11.

O filtro proposto neste trabalho pode ser aplicado independente da distribuição da série temporal, sendo adequado a uma classe de séries que apresentem até um determinado grau de sazonalidade móvel. Além disso, é permitida a existência de tendência. Ao utilizar o filtro proposto, a série a ser sazonalmente ajustada passará simultaneamente por dois processos de filtragem: o processo de eliminação da tendência e o processo de extração da sazonalidade.

O filtro proposto, projetado no domínio da frequência (transformada-z), é representado pela seguinte função:

$$P(z) = (1 - z^{-1})^{M+1} G(z), \quad [3]$$

onde M é a ordem do polinômio de tendência e $G(z)$ é definido como

$$G(z) = \sum_{t=-p}^{L-p-1} g(t) z^{-t} \quad [4]$$

onde p representa um deslocamento e L é o número de graus de liberdade do filtro (sendo que o comprimento do filtro é $L+M+1$). Os coeficientes $g(t)$ são números reais. O termo $(1 - z^{-1})^{M+1}$ responsável por eliminar a tendência polinomial de ordem até M , e os L graus de liberdade do termo $G(z)$ são ajustados para que o filtro deixe passar as componentes sazonais desejadas.

Para que o filtro seja robusto a variações na sazonalidade, os coeficientes de $G(z)$ devem ser otimizados de modo a deixar passar a sazonalidade em torno dos harmônicos numa faixa de frequência de largura correspondente a uma porcentagem (α) da frequência sazonal. Além disso, deve-se eliminar o máximo possível da componente irregular. Dessa forma, as bandas passantes terão resposta desejada ($D(\omega)$) igual a um, as bandas de rejeição terão resposta desejada igual a zero, e as bandas de transição (*don't care band*) apenas facilitarão o processo de otimização, não possuindo um valor desejado específico. Essas características podem ser melhor visualizadas na Figura 1, onde N_s corresponde à periodicidade da série (em uma série mensal, N_s é igual a 12).

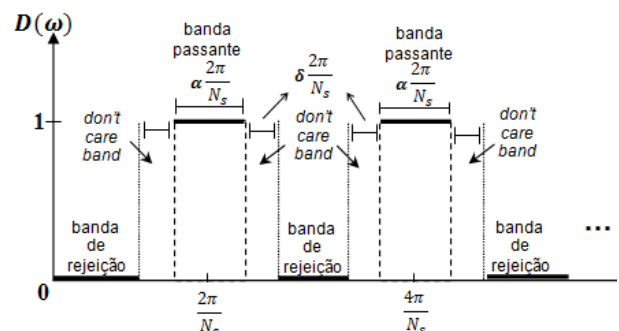


Figura 1. Esquema detalhado do procedimento de filtragem

Vale ressaltar que por deixar passar a sazonalidade considerando uma certa banda em torno dos harmônicos, o filtro permite que a sazonalidade móvel, de até um determinado grau, seja tratada de forma adequada.

Os coeficientes do filtro são obtidos por meio de um processo de otimização, na qual minimiza-se a soma dos quadrados da diferença entre a resposta do filtro e a resposta desejada $D(\omega)$. Ou seja, minimiza-se a soma dos quadrados dos erros.

O filtro possui cinco parâmetros de projeto, cujo ajuste permite a adequação do mesmo a séries com sazonalidade móvel. Tais parâmetros são: alpha (α), delta (δ), fator de superamostragem, peso (w_0), e ordem do filtro (N). Eles serão abordados na subseção 2.1.

2.1 Parâmetros do Filtro Proposto

Considerando que a série Y_t é periódica, de período N_s , deseja-se obter respostas próximas (ou iguais) a 1, nas bandas em torno das frequências sazonais $\left(\frac{2\pi}{N_s}, \frac{4\pi}{N_s}, \dots, \frac{12\pi}{N_s}\right)$, e zero (ou próximas a zero), nas demais frequências.

Nesse procedimento, α corresponde à largura da banda em torno dos harmônicos. Nos resultados mostrados neste artigo, será utilizado $\alpha = 1/3$. Essa escolha baseou-se nas características das séries reais.

O δ representa a largura da banda de transição (*don't care band*). Ele auxilia no processo de otimização. A Figura 1 ilustra o conceito desse parâmetro, assim como o α . O valor de δ que melhor se ajustou aos dados testados foi $\delta = 1/30$.

O peso (w_0) indica a importância dada à minimização do erro nas bandas passantes em relação à banda de rejeição. Valores altos do peso (w_0) geram ganho em torno dos harmônicos próximo de 1, mas a atenuação fora dos harmônicos diminui. Nos resultados mostrados neste artigo, utilizou-se $w_0=1$.

O número de pontos utilizados durante a otimização equivale ao fator de superamostragem multiplicado pelo tamanho do filtro. A restrição é que o fator de superamostragem seja um número ímpar. No filtro proposto foi utilizado fator de superamostragem igual a 401, pois esse valor respondeu adequadamente aos propósitos do filtro.

O último parâmetro a ser definido é a ordem do filtro (N), ou seja, o tamanho do filtro representado pelo número de coeficientes que ele possui. Como o propósito inicial foi compará-lo ao X-11, vários filtros foram projetados, de modo que o número de observações perdidas no início e no fim da série fossem iguais ao do método X-11 em cada caso.

Os parâmetros δ e w_0 foram escolhidos com base em simulações que visavam à minimização dos erros na estimativa da sazonalidade de séries com parâmetros típicos.

A seguir, no Gráfico 1, é apresentada a função de transferência do filtro proposto ($\alpha = 1/3$; $\delta = 1/30$; $w_0=1$), juntamente com a função de transferência do filtro cuja aplicação seria equivalente à aplicação do método X-11. A curva tracejada representa a função de transferência do X-11, e a curva contínua, a função de transferência do filtro proposto. Como pode-se perceber, a largura da banda do filtro proposto, em torno dos harmônicos, é maior do que a do X-11, permitindo assim estimar mais adequadamente a componente sazonal na presença de instabilidade.

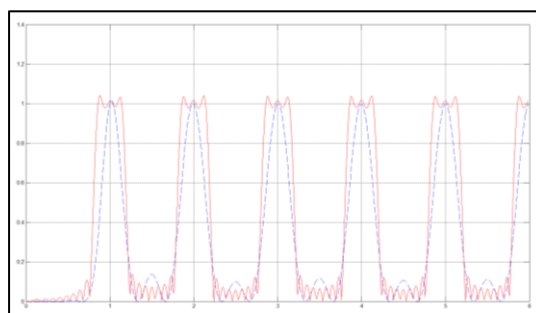


Gráfico 1. Função de transferência do filtro proposto e do X-11

A seguir será apresentado um resumo dos principais resultados encontrados, com base na configuração do filtro aqui definida.

3. Resultados

Para avaliar o desempenho do filtro proposto, foram gerados sinais sazonais artificiais para séries mensais. A decisão de se trabalhar com séries simuladas foi tomada uma vez que, como a componente sazonal é não observável, a forma adequada de avaliar o desempenho do filtro é a partir de séries onde se conheça o valor desejado.

Foi simulado um sinal com três parâmetros (A , b , k), definidos na equação [2]. A escolha dos valores desses parâmetros foi feita com base nas características de séries reais, mensais, com sazonalidade móvel, obtidas no dia 26/6/2013, nos

sites IPEA DATA [4] e IBGE [2]. Foram pesquisadas 78 séries, das quais 31 possuíam sazonalidade móvel.

Como ilustração da sazonalidade móvel presente nas séries, é apresentado o gráfico dos fatores sazonais da série de Produção Física Industrial do Espírito Santo (Gráfico 2).

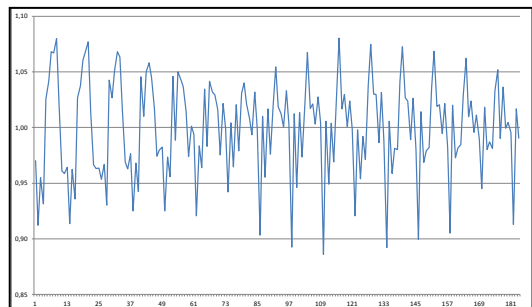


Gráfico 2. Produção industrial – indústria geral: Espírito Santo

Para a obtenção dos parâmetros (A, b e k), com base nas séries reais, foi analisada a componente sazonal de cada série real com sazonalidade móvel. O objetivo era obter os valores dos parâmetros das séries simuladas que gerassem o mesmo nível de variação da sazonalidade.

Após a obtenção dos valores dos parâmetros A, b e k, foram geradas as séries simuladas, Y_t , com base na soma do sinal (sazonal) simulado e da componente irregular. Como componente irregular, considerou-se uma variável aleatória, independente e identicamente distribuída, com distribuição $N(0, \sigma^2)$. Cada simulação foi replicada 100 vezes, aleatorizando o desvio-padrão da componente irregular.

O Gráfico 3 apresenta um sinal simulado, para uma série mensal, utilizando: $A = 0,4$, $b = 0,2$ e $k = 96$, sem componente irregular. Observando o padrão da sazonalidade móvel, nota-se que ele volta a se repetir depois de 8 anos (96 observações).

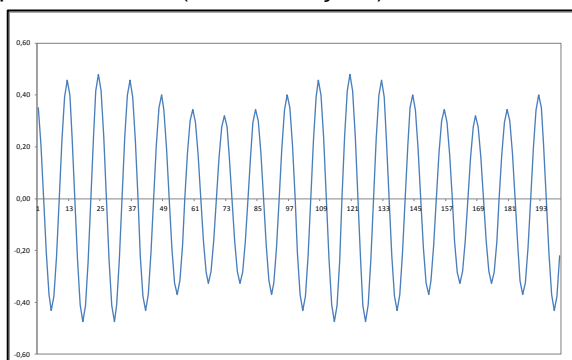


Gráfico 3. Sinal sazonal simulado com sazonalidade móvel, no domínio do tempo

A Figura 2 apresenta o espectro na frequência do mesmo sinal simulado no Gráfico 3. Analisando a

figura, pode-se visualizar o impacto da amplitude (A), da taxa de variação da sazonalidade (b) e do parâmetro k, na frequência.

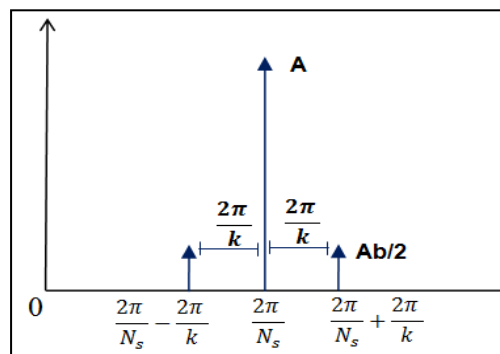


Figura 2. Espectro na frequência de um sinal simulado

Nesta Figura 2 fica ilustrado que quanto menor for o valor de k, e maior for a razão $Ab/2$, mais indicado é o filtro proposto para o ajuste sazonal, uma vez que serão necessárias bandas passantes mais largas.

Para efetuar as comparações entre o filtro proposto e o filtro X-11, foi utilizada a estatística razão sinal ruído (SNR), dada pela relação entre o valor quadrático médio da amplitude do sinal e o valor quadrático médio da amplitude do erro de estimativa da sazonalidade. Ou, em outras palavras, a razão entre a potência do sinal e a potência do erro de estimativa. Devido à estrutura do filtro proposto, a métrica de desempenho adequada para comparações é a SNR. Nesse caso, o filtro proposto será superior a outro quando a razão sinal ruído dele for maior do que a razão sinal ruído do outro.

Com o objetivo de comparar a SNR do filtro proposto com a SNR do X-11, foram realizadas algumas simulações. Os resultados estão apresentados na próxima subseção.

3.1 Simulações

A fim de comparar o desempenho do filtro proposto com o do X-11, para diferentes valores de A, b e s, onde s representa o desvio-padrão da componente irregular, foram realizadas algumas simulações. Nas simulações, para um determinado k (definido na seção 2), e uma dada combinação de A, b e s, encontrou-se qual tamanho do filtro equivalente ao método X-11, maximizava a SNR do filtro X-11.

A partir daí, com o tamanho do filtro X-11 já determinado, buscou-se o valor da SNR do filtro proposto com o mesmo tamanho do filtro equivalente do X-11. A partir daí, comparou-se a SNR do filtro proposto com a SNR obtida pelo X-11.

As séries foram simuladas com 400 observações. Escolheu-se trabalhar com série temporais longas

pois, como se trata de um filtro simétrico, algumas observações da série são perdidas. É importante notar que não fez parte dos objetivos deste trabalho 'estender' a série – com *forecasts* e *backcasts*. A razão para isto é que o foco deste trabalho é na comparação dos desempenhos dos filtros. Porém, para o filtro ser utilizado em séries reais, as mesmas devem ser 'esticadas', preferencialmente com base em modelos ARIMA.

A seguir são apresentadas as situações nas quais o filtro proposto é superior ao método X-11.

3.2 Situações em que o filtro proposto apresenta desempenho superior ao X-11

A fim de avaliar as condições nas quais o filtro proposto supera o X-11, foi analisada a razão sinal ruído, dos filtros, variando alguns parâmetros do sinal simulado. Isso foi realizado com base na variação de **b**, **k**, e da razão **A/s** (equação [2]).

(i) Resultados encontrados com base na variação de 'b'

O parâmetro **b** representa a taxa de variação da sazonalidade, assumindo valores no intervalo (0,1).

Nas séries reais, o valor máximo encontrado, de **b**, foi 52%. Sendo assim, na maioria dos testes, foi considerado $b \leq 50\%$.

O Gráfico 4 mostra a relação entre o valor de **b** e a SNR do filtro X-11 e do filtro proposto. Foi utilizado o valor de $k=96$, e razão $A/s = 6$.

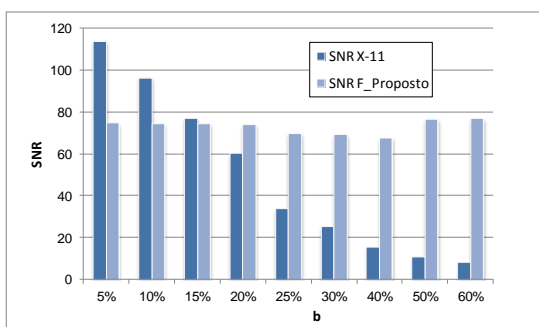


Gráfico 4. Relação entre 'b' e a SNR do filtro proposto, e do filtro X-11

Como se pode observar, quanto maior for o valor de **b**, melhor é a SNR do filtro proposto, em relação à SNR do X-11. Vale destacar que a SNR do filtro proposto não se altera de forma relevante com a variação de **b**, enquanto que a SNR do X-11 apresenta uma queda acentuada.

Observa-se também, que para $b \leq 15\%$, a SNR do filtro X-11 supera o filtro proposto. Mas esse resulta

também está relacionado ao valor de **k**, que será analisado na próxima subseção.

(ii) Resultados encontrados com base na variação de 'k'

Para analisar o desempenho do filtro proposto, em comparação com o X-11, com base na variação **k**, foi fixado o valor de $b = 25\%$, e razão $A/s = 6$.

Como o parâmetro **k** representa o número de meses no qual o padrão de sazonalidade móvel volta a se repetir, quanto menor for o **k**, mais instável será a sazonalidade. O Gráfico 5 mostra que nos casos onde **k** é menor ou igual a 120, o filtro proposto apresenta SNR superior ao X-11.

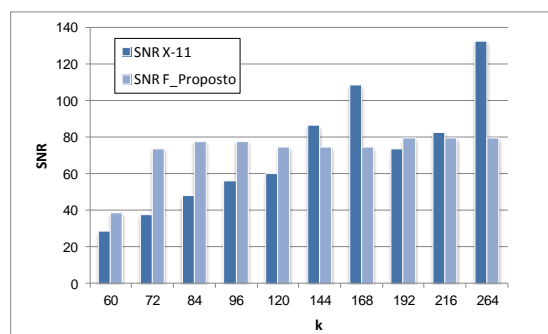


Gráfico 5. Relação entre 'k' e a SNR do filtro proposto, e do filtro X-11

Vale lembrar que o parâmetro α , do filtro proposto, é igual a $1/3$. E com base na relação entre **k** e α , o valor mínimo de **k** que ainda permitiria se usar um $\alpha = 1/3$ é 72. Isso pode ser notado pela maior relação entre a SNR do filtro proposto e a SNR do X-11. Porém, o filtro proposto mantém um nível satisfatório de SNR para os demais valores de **k**.

(iii) Resultados encontrados com base na variação de 'A/s'

A razão entre a amplitude do sinal, dada por **A**, e o desvio-padrão da componente irregular, dado por **s**, apresenta uma relação interessante com a SNR dos filtros, como pode ser observado no Gráfico 6. Enquanto a SNR do X-11 cresce linearmente com o aumento de A/s , a SNR do filtro proposto cresce exponencialmente.

Percebe-se também que para $A/s > 6$, o resultado da SNR do filtro proposto supera o filtro X-11. Nas séries típicas, o valor mínimo observado de A/s foi 2,2 e o máximo foi 11,7, sendo que 64% delas apresentaram $A/s > 6$.

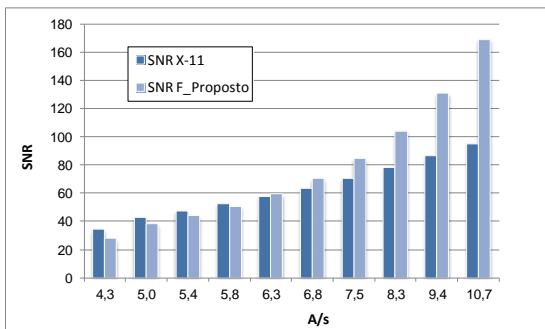


Gráfico 6. Relação entre 'A/s' e a SNR do filtro proposto, e do filtro X-11

Neste teste utilizou-se $k = 96$ e $b = 25\%$. Para diferentes valores de k e b , a razão A/s na qual o filtro proposto supera o X-11 sofre alteração.

(iv) Condições nas quais a SNR do filtro proposto é superior a SNR do X-11, segundo valores de A/s, k e b

Ao analisar a razão $\frac{SNR_{\text{filtro proposto}}}{SNR_{X-11}}$, a fim de identificar as situações em que o filtro proposto apresenta desempenho melhor do que o X-11, com base nos valores de b , k e A/s , foram encontrados os seguintes resultados ilustrados no Quadro 1 e listados em seguida:

'Razão de SNR' > 1 quando A/s...	k	
	72	96
b	15%	> 8
	20%	> 5
	25%	> 5
	30%	> 3
	50%	> 3

Quadro 1. Condições nas quais a SNR do filtro proposto é maior do que a SNR do X-11, segundo valores de A/s, k e b

- Quando $b \leq 15\%$, o filtro proposto é superior ao X-11 apenas para $k = 72$ e $A/s > 8$. Esse resultado é devido à baixa taxa de variação da amplitude sazonal, sendo favorável ao método X-11;
- Para $b = 20\%$, o filtro proposto se mostra mais adequado do que o filtro X-11, quando $A/s > 5$ (sendo $k = 72$) e $A/s > 8$ (sendo $k = 96$).
- Os resultados para $b = 25\%$ também são favoráveis ao filtro proposto, bastando A/s ser superior a 5 (quando $k = 72$) e a 6 (quando $k = 96$).
- Nos casos em que $b \geq 30\%$, o filtro proposto apresentou melhor desempenho para todas as razões A/s testadas (superiores a 3).

4. Conclusões

Neste trabalho, foi apresentado o projeto de um filtro automático para o ajuste sazonal, robusto a variações na sazonalidade. Os resultados encontrados, com a aplicação do filtro proposto, foram comparados com os resultados obtidos utilizando-se o método X-11.

A escolha de comparar os resultados do filtro proposto com o X-11 se deve ao fato do X-11 ser, hoje, o método de ajuste sazonal mais utilizado pelos órgãos oficiais de estatística. Além disso, trata-se de um filtro automático, assim como o filtro proposto.

Nas comparações entre o filtro proposto e o X-11, foram utilizados sinais simulados, cujos parâmetros foram determinados a partir de séries reais. Os resultados encontrados indicaram as situações nas quais o filtro proposto tem um desempenho superior ao do X-11.

Após analisar se essas situações estavam presentes nas séries reais, concluiu-se que o filtro proposto é uma boa alternativa ao X-11 quando há presença de sazonalidade móvel.

5. Referências Bibliográficas

- HIGGISON J. **An F test for the presence of moving seasonality when using Census Method II-X-11 variant.** Mimeo, 1975. Disponível em: www.census.gov.
- IBGE. Disponível em: <<http://www.ibge.gov.br>>. Acesso em: out. 2013.
- IMF - INTERNATIONAL MONETARY FUND. **Monetary and Financial Statistics Compilation Guide.** Washington, D.C., 2008.
- IPEA. Disponível em: <<http://www.ipeadata.gov.br>>. Acesso em: out. 2013.
- KAISER, R. **Detection and estimation of structural changes and Outliers in unobserved components.** Statistics and Econometrics, Series 16. Universidad Carlos III de Madrid, 1998.
- KUZNETS, S. **Seasonal Variations in Industry and Trade.** National Bureau of Economic Research. New York, 1933.
- PLANAS, C. **The analysis of seasonality in economic statistics: a survey of recent developments.** *Questiões* 22.1: 157-171. 1998. Disponível em: <http://eudml.org/doc/40241>.
- SUTRADHAR, B. & DAGUM, E. **Bartlett-type modified test for moving seasonality with applications.** *Royal Statistical Society. The Statistician*, 47, Parte 1, 1998.
- U. S. CENSUS BUREAU. **X-13ARIMA-SEATS Reference Manual.** Washington, DC, 2012.
- WALLIS, F. & THOMAS J. **Seasonal Variation in Regression Analysis.** *Journal of the Royal Statistical Society*, A 134, p. 57-72, 1971.