



CÁLCULO DE FASORES COM TAXAS NÃO MÚLTIPLAS DA FREQUÊNCIA FUNDAMENTAL

André L.L. Miranda¹
(miranda@cepel.br)

Marco Antonio M. Rodrigues^{2*}
(mamr@cepel.br)

Eduardo A. B. da Silva¹
(eduardo@lps.ufrj.br)

Raul Balbi Sollero²
(rbs@cepel.br)

(1) COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro
(2) Centro de Pesquisas de Energia Elétrica - CEPEL

1 RESUMO

O artigo apresenta um estudo sobre os efeitos, no cálculo de grandezas fasoriais, causados por erros na amostragem de um sinal da rede elétrica. Em particular, o artigo vai focar o problema relatado à transformada discreta de Fourier, utilizada como base para o cálculo de fasores. Essa transformada necessita, para maior precisão, de uma janela de cálculo cuja quantidade de amostras corresponda a uma quantidade inteira de ciclos da fundamental. Caso o cálculo não seja feito desta forma, um fenômeno conhecido como vazamento espectral distorcerá o valor final. São mostrados estudos comparando a utilização de diferentes janelas (como a retangular, Hamming), assim como a interpolação de amostras de forma a gerar janelas com o tamanho apropriado.

Palavras Chave: fasores, vazamento espectral, transformada de Fourier

2 INTRODUÇÃO

2.1 Janelas Temporais e alteração da taxa de amostragem

Para o cálculo do componente fasorial de grandezas elétricas, como tensão e corrente, é comum utilizar-se o Filtro de Fourier, baseado na Transformada Discreta de Fourier – DFT. Alguns relés utilizam a Transformada Discreta de Cossenos – DCT, que apresenta certas vantagens técnicas [1], porém o problema aqui tratado permanece em ambas as implementações. A DFT produz um espectro discreto em frequência, ou seja, uma representação consistindo de “raias espectrais”, cada uma indicando a intensidade do espectro contínuo do sinal original, em um conjunto discreto de frequências, onde devem estar incluídas a

componente fundamental (60 Hz, no caso brasileiro) e suas harmônicas. Entretanto, isto somente acontece quando a quantidade de amostras (N), utilizadas no cálculo, corresponde exatamente a um múltiplo inteiro do período da fundamental ($N = i * f_s / 60$ no exemplo anterior, sendo i um número inteiro e f_s a frequência de amostragem). Quando isto não ocorre, a energia da componente fundamental se espalha pelo espectro, como se houvesse um “vazamento” da energia desse componente – esse fenômeno é então chamado de *vazamento espectral*¹. Na Figura 1 podemos observar um sinal senoidal onde foi utilizada uma janela de amostragem de 1.25 ciclo (primeiro gráfico). No segundo gráfico aparece o espectro teórico do sinal e no terceiro gráfico o espectro obtido, com o vazamento espectral bem claro.

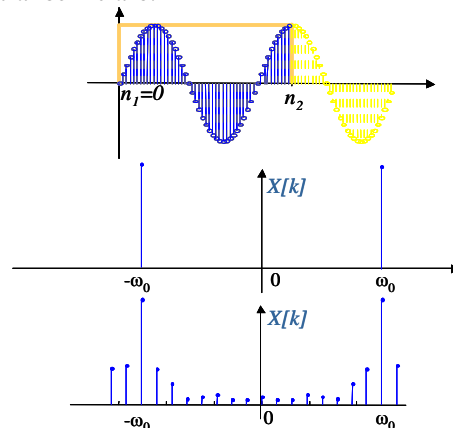


Figura 1: Representação do vazamento espectral.

Para reduzir o problema do vazamento espectral costuma-se multiplicar o sinal por funções (chamadas usualmente de *janelas*) no tempo, tais como a janela de Hamming [2]. O objetivo da utilização das *janelas* está relacionado com a interpretação no tempo do

¹ Do inglês, “leakage”.

fenômeno de vazamento espectral: para a DFT o trecho do sinal analisado (de N amostras) é periódico, com período N , ou seja, ele se repete infinitamente. Por exemplo, o trecho entre n_1 e n_2 mostrado no primeiro gráfico da Fig. 1, é entendido pela DFT da forma mostrada na Fig. 2.

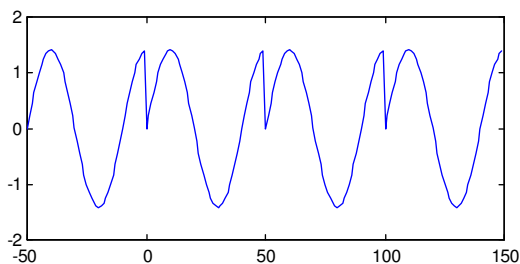


Figura 2: Periodização do trecho utilizado na DFT.

Quando o trecho utilizado não possui uma quantidade inteira de períodos da fundamental, surgem descontinuidades na fronteira do trecho utilizado. O objetivo da janela é reduzir estas descontinuidades. A Fig. 3 apresenta um trecho com 1.75 ciclos de uma senóide que foi multiplicado pela janela de Hamming, resultando em um sinal atenuado na fronteira do trecho utilizado, o que reduz o vazamento.

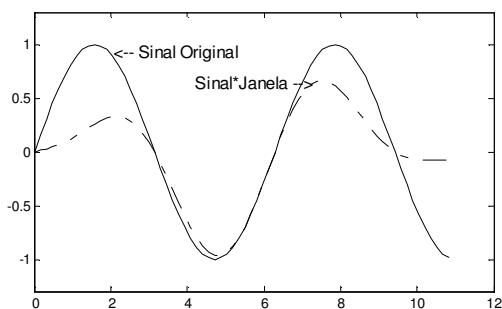


Figura 3: Trecho de uma senóide multiplicado pela janela de Hamming.

Entretanto, de forma geral, a utilização de janelas não corrige o erro na frequência das “raias” do espectro discreto, ou seja, mesmo com a redução do vazamento, o valor discreto obtido não corresponde exatamente à frequência fundamental, mas sim à uma frequência próxima. Por este motivo, surgiu a idéia de alterar a taxa de amostragem do sinal, de forma a forçar que o tamanho do trecho utilizado (N) corresponda a um múltiplo inteiro da frequência fundamental. Por motivos práticos, esta alteração não pode ser feita no equipamento de medição, em tempo real. Ela é feita através de técnicas discutidas nesse artigo e inteiramente “por software”. Assim os resultados podem ser aplicados diretamente a registros oscilográficos.

Dependendo da aplicação, deve-se avaliar se os erros provocados pelas variações de frequência que ocorrem no sistema de potência são relevantes. Se o forem é necessário implementar um algoritmo para medição de frequência.

2.2 Fontes de vazamento espectral em sistemas de potência

Existem, pelo menos, dois problemas que provocam o *vazamento espectral* na amostragem dos sinais:

- a frequência da rede elétrica nem sempre se mantém em 60 Hz, podendo variar ligeiramente em condições de operação normal;
- equipamentos importados utilizam taxas de amostragem que não são múltiplas da fundamental.

A questão da variação da frequência da fundamental é comum a qualquer medição (seja feita por relés ou oscilógrafos). É causada principalmente por desbalanceamentos entre geração e carga no sistema elétrico. O seu efeito é exatamente o de provocar a variação do período da fundamental, fazendo com que a amostragem de N pontos, baseada em um tempo fixo, não corresponda a uma quantidade inteira de períodos da fundamental.

A questão da não utilização de taxas múltiplas da fundamental é relativamente comum em oscilógrafos digitais importados de países em que a frequência fundamental da rede elétrica é diferente. Muitos modelos, especialmente os mais antigos, não permitem a seleção de taxas múltiplas da fundamental utilizada no sistema elétrico brasileiro (60 Hz). Assim, existem equipamentos que podem amostrar sinais à taxa de 1000 amostras por segundo (a/s), o que equivale a 20 amostras por ciclo (a/c) em 50 Hz, porém não podem fazê-lo a 1200 a/s (20 a/c em 60 Hz). Os oscilogramas obtidos a 1000 a/s vão possuir alguns ciclos com 16 amostras e outros com 17 amostras.

O artigo descreve estudos que foram realizados para levantar as intensidades desses erros. Casos reais e simulados de oscilografia são apresentados. Uma solução para o problema também é proposta.

Cabe notar que no desenvolvimento do trabalho encontramos um artigo [3] que também estudava a alteração da taxa de amostragem para evitar o vazamento, porém sem visar aplicação em sistemas de potência. Apesar de que uma comparação minuciosa dos resultados estar além do escopo deste trabalho, os resultados obtidos concordam, sob uma análise qualitativa, bastante com os nossos.

3 INTERPOLAÇÃO DE SINAIS

De forma a gerar janelas com tamanho apropriado, conforme explicado no item anterior, torna-se necessário interpolar o sinal original de forma que, para a DFT, o sinal se mostre o mais similar possível ao original, porém com uma nova frequência de amostragem. Neste trabalho utilizamos a interpolação cúbica por *splines* [4], método que gera novas amostras em qualquer instante de tempo, a partir de três amostras do sinal original. Alternativamente poder-se-ia utilizar técnicas de multitaxas [5], cuja principal

vantagem é a de preservar a informação espectral de cada componente do sinal no processo de interpolação. Porém, devido aos excelentes resultados alcançados com o método de *splines*, tal variante não foi implementada.

Todas as simulações foram feitas com o auxílio do programa **MATLAB**[®] [6].

4 TESTES COMPARATIVOS

Nos testes a seguir o erro calculado é a diferença ponto a ponto entre o valor do módulo ou do ângulo calculado e o valor ideal. O cálculo do ângulo tem o mesmo tratamento do módulo, exceto pelo tratamento da escala de valores que será de 0 e 360 graus.

O critério do Erro Médio Quadrático (MSE), equação (1), se mostrou bem mais conveniente do que o valor médio do erro, pois o comportamento do valor médio era oscilatório enquanto o MSE apresenta curva monotônica mais correlacionada com o fenômeno observado.

$$MSE = \frac{\sum_{n=0}^N (Mod(n) - \overline{Mod(n)})^2}{N} \quad (1)$$

4.1 Problemas de variação de frequência

Para realização desses testes foi gerado o seguinte sinal:

$$x(t) = sen(2\pi ft + \varphi) \quad (2)$$

A frequência f foi variada de duas formas:

- Assumindo valores entre 59,5 e 60,5 Hz (variação de frequência de $\pm 0,5$ Hz).
- Assumindo valores entre 58,5 e 61,5 Hz (variação de frequência de $\pm 1,5$ Hz).

O sinal foi amostrado nas frequências de 240, 360, 480, 600, 960 e 1200 a/s e, para cada sinal, foi calculado o valor médio quadrático do erro.

Os resultados se encontram nas Figuras 4, 5 e 6.

Conforme podemos observar o erro nos valores de módulo e ângulo dos fasores para esses casos é muito baixo. Para frequências de amostragem inferiores a 300 a/s (5 a/c) - Figura 6 - o erro tende a aumentar muito. Por outro lado, à medida em que a taxa de amostragem aumenta, o erro diminui.

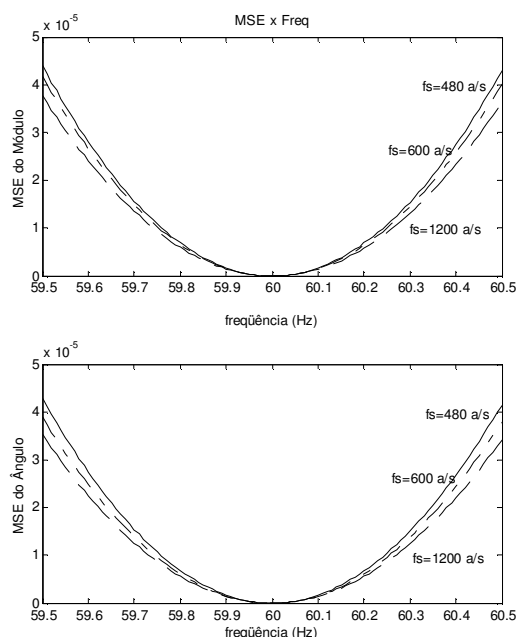


Figura 4: Gráfico MSE x Frequência da fundamental para diversas frequências de amostragem, para a faixa de variação de ± 0.5 Hz.

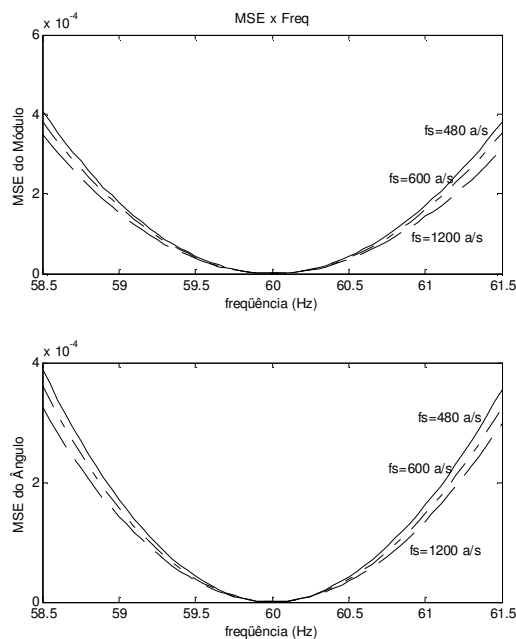


Figura 5: Gráfico MSE x Frequência da fundamental para diversas frequências de amostragem, para a faixa de variação de ± 0.5 Hz..

Para efeito de comparação, simulamos uma falta do tipo AN em uma linha de transmissão de 98 Km. Os valores de módulo e ângulo de tensão e corrente foram variados, antes de efetuar o cálculo da distância, da seguinte forma:

- Para simular a variação de frequência de ± 0.5 Hz, a variação foi de 1% sobre o valor calculado sem qualquer variação de frequência.

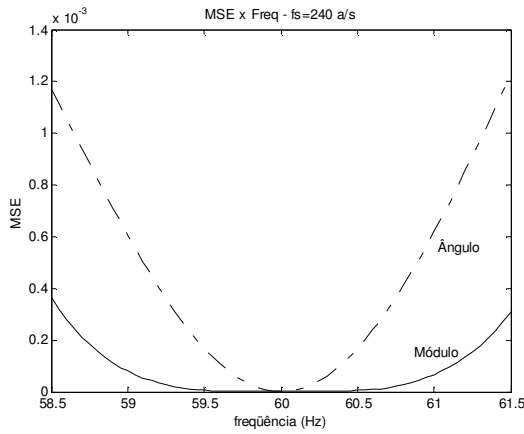


Figura 6: Gráfico MSE x Freqüência da fundamental para 240 a/s.

- Para simular a variação de freqüência de ± 1.5 Hz, a variação foi de 3% sobre o valor calculado sem qualquer variação de freqüência.

Esses valores de variação são baseados no MSE máximo obtido, conforme mostram as Figuras 4 e 5. Não foi considerado o erro de 240 a/s. Foi utilizado um algoritmo de localização de falta de uma extremidade da linha (Takagi [7]). Os resultados aparecem na Tabela 1.

Tabela 1: Erros na localização de faltas provocados pela variação de módulo e ângulo.

Descrição	± 0.5 Hz (%)	± 1.5 Hz (%)
Valores Normais	0.0	0.0
Variação de $ Va $	1.0	3.0
Variação de $\text{ang}\{Va\}$	1.0	3.0
Variação de $ Ia $	1.3	4.0
Variação de $\text{ang}\{Ia\}$	0.4	1.1

Apesar dessa simulação não revelar completamente o comportamento do erro de localização de faltas, é possível ter-se uma idéia da magnitude dos erros envolvidos. Os valores apresentados são percentuais em relação ao valor encontrado quando não há variação na freqüência. Se for considerado o erro em relação ao comprimento da linha, os valores percentuais são bem menores, da ordem de um centésimo do valor apresentado.

Para avaliação correta do erro, deveria se realizar um cálculo de sensibilidade do algoritmo de localização de faltas. Este cálculo incluiria variáveis como por exemplo a distância da falta e o comprimento da linha, posto que o método utilizado [7] possui um comportamento não linear para estas variáveis.

4.2 Problema da taxa não múltipla da fundamental

Para realização desses testes foi gerado o seguinte sinal:

$$x(t) = \text{sen}(2\pi ft + \varphi), \quad f = 60 \text{ Hz} \quad (2)$$

O sinal x foi amostrado com taxas que variavam para cada experimento, mantendo sempre o tamanho de 3 ciclos de sinal. O valor de φ não teve influência nos resultados das simulações. O sinal amostrado multiplicado pelas janelas retangular e de Hamming [2] foi usado para determinar o erro. Para a interpolação usamos o sinal com a janela retangular.

Sinal amostrado:

$$X(n) = x(n * T_s), \quad n=0, \dots, T_s \quad (3)$$

Retangular:

$$W_{ret}(n) = u(n) - u(n - T_w) \quad (4)$$

Hamming:

$$W_{ham}(n) = 0,54 - 0,46 * \cos(2\pi n / T_w) \quad (5)$$

$u(n)$ é o degrau unitário.

T_w é o período da janela.

T_s é o período de amostragem do sinal.

Se $N = 1/(f * T_s)$ for um valor inteiro, o módulo e o ângulo do sinal calculado pelo filtro de Fourier não apresenta erro. No entanto, se N for um valor fracionário, haverá o problema de vazamento espectral, conforme explicado anteriormente.

Variou-se a taxa de amostragem de 121 Hz a 2400 Hz em intervalos de 1 Hz, aplicando o filtro de Fourier para cada freqüência e calculando o erro. Para freqüências baixas o resultado não foi bom em nenhum dos casos, como se observa nas Figuras 7 e 8. Para as freqüências de amostragem acima de 600Hz os resultados foram bem melhores (Figuras 9 e 10).

Para utilizar a janela retangular ou de Hamming é necessário escolher uma quantidade inteira de amostras por ciclo. Isto pode ser feito por uma das equações abaixo:

$$T_{floor} = N * \text{floor}\left(\frac{1}{f * T_s}\right) \quad (6)$$

$$T_{ceil} = N * \text{ceil}\left(\frac{1}{f * T_s}\right) \quad (7)$$

$$T_{round} = N * \text{round}\left(\frac{1}{f * T_s}\right) \quad (8)$$

A fórmula da equação (8) foi preferida pois gerava o menor erro possível na maioria das faixas de freqüência quando se utilizava o método das janelas. Para o método da interpolação, o menor erro ocorria para a fórmula da equação (7).

² A função $\text{floor}(f)$ retorna a parte inteira de f truncada; $\text{ceil}(f)$ retorna o valor inteiro de f aproximado pelo inteiro imediatamente superior; $\text{round}(f)$ aproxima pelo inteiro mais próximo.

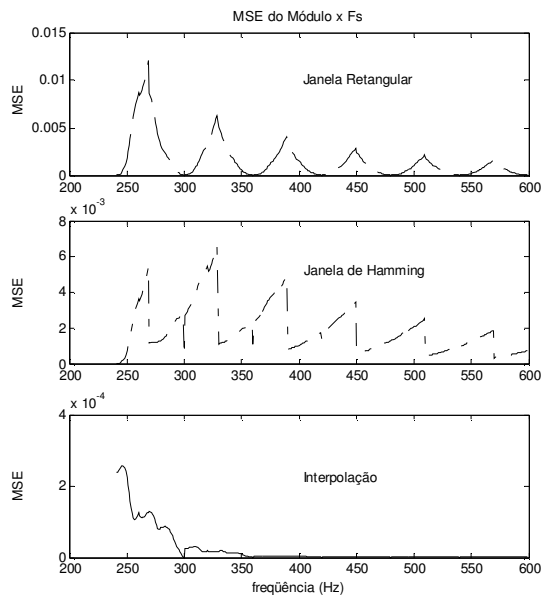


Figura 7: Gráfico MSE do módulo x Frequência de amostragem. Comparação entre os métodos de janela e a interpolação (baixas frequências).

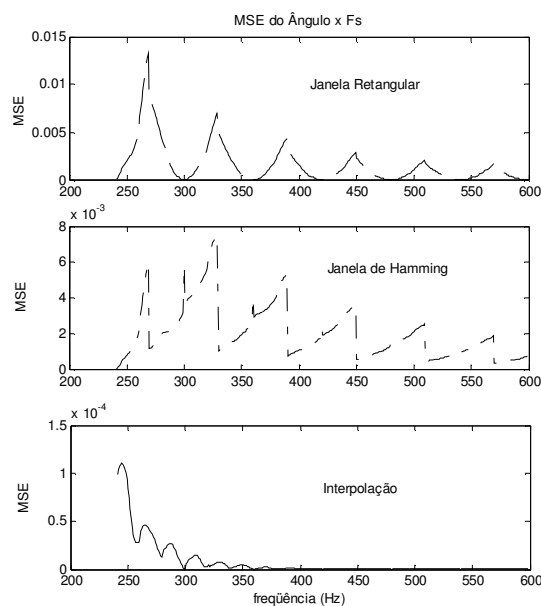


Figura 8: Gráfico MSE do ângulo x Frequência de amostragem. Comparação entre os métodos de janela e a interpolação (baixas frequências).

As Figuras 7, 8, 9 e 10 apresentam o MSE do módulo e do ângulo para várias frequências de amostragem. Pela escala no eixo vertical esquerdo do gráfico pode-se notar a superioridade da técnica de interpolação.

O erro possui um caráter repetitivo, porém com uma tendência de atenuação com o aumento da frequência. Esse caráter repetitivo é devido ao fato de que nas frequências múltiplas da fundamental o erro é praticamente nulo. Nas Figuras 11 e 12 pode-se observar a variação do MSE entre dois valores múltiplos inteiros da frequência fundamental. Note que

para a janela de Hamming o erro reduz-se nas extremidades, mas não se anula como para a janela retangular; isto ocorre porque a janela de Hamming acaba por distorcer o sinal. O método da interpolação apresenta valores bem inferiores, porém o erro aumenta no início da faixa de frequências por se utilizar a equação (7) no cálculo do número de amostras por janela.

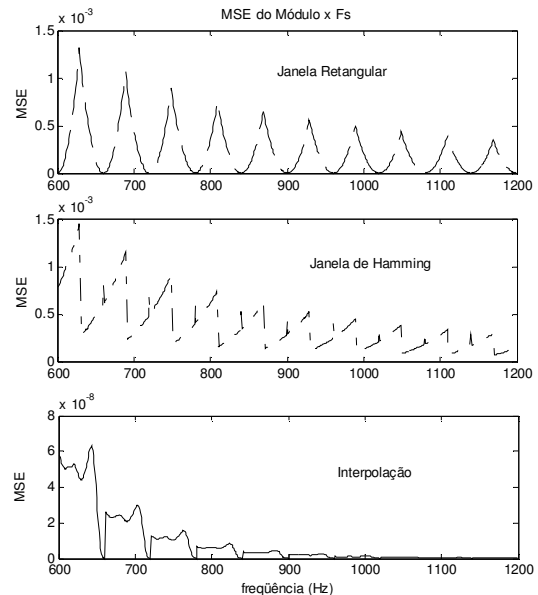


Figura 9: Gráfico MSE do módulo x Frequência de amostragem. Comparação entre os métodos de janela e a interpolação (frequências médias).

5 CONCLUSÕES

O artigo apresentou um estudo sobre os efeitos causados pela variação da frequência fundamental e pela amostragem do sinal em taxa não múltiplas com a fundamental no cálculo de grandezas fasoriais. Para uma variação pequena da frequência fundamental, os erros são muito pequenos (Tabela 1), não sendo necessário na maior parte dos casos alterar a frequência de amostragem dos sinais. No entanto, caso seja necessário, é possível a determinação da frequência por outros métodos [8].

Para o caso em que a taxa de amostragem não é múltipla com a da fundamental foram analisados os métodos de janelamento e interpolação, sendo que este último se mostrou muito mais eficiente do que o primeiro, até mesmo para taxas de amostragem muito baixas, gerando os menores erros para o cálculo de fasores.

Assim, considerando-se o estudado nesse artigo, é possível minimizar as fontes de erro relacionadas à questão da janela de amostragem dos sinais.

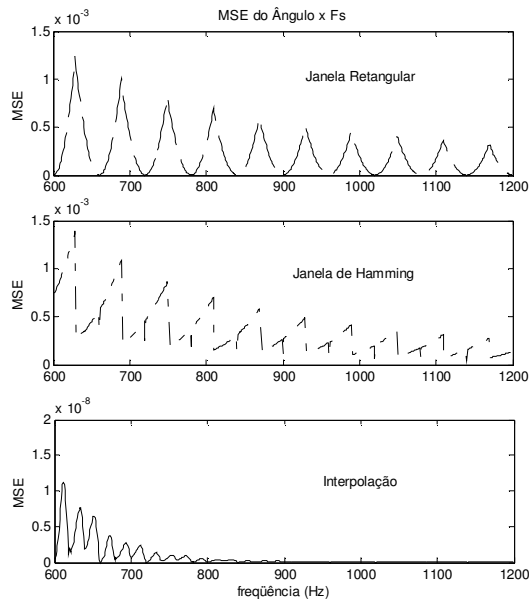


Figura 10: Gráfico MSE do ângulo x Frequência de amostragem. Comparação entre os métodos de janela e a interpolação (frequências médias).

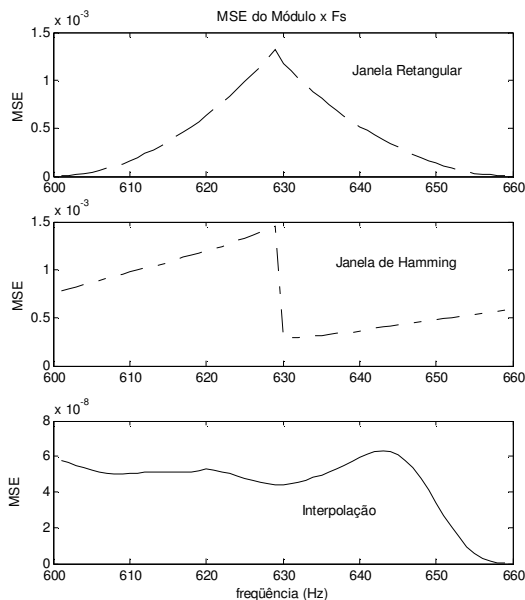


Figura 11: Gráfico MSE do módulo x Frequência de amostragem. Comparação entre os métodos de janela e a interpolação para um intervalo entre frequência de amostragem múltiplas com a fundamental.

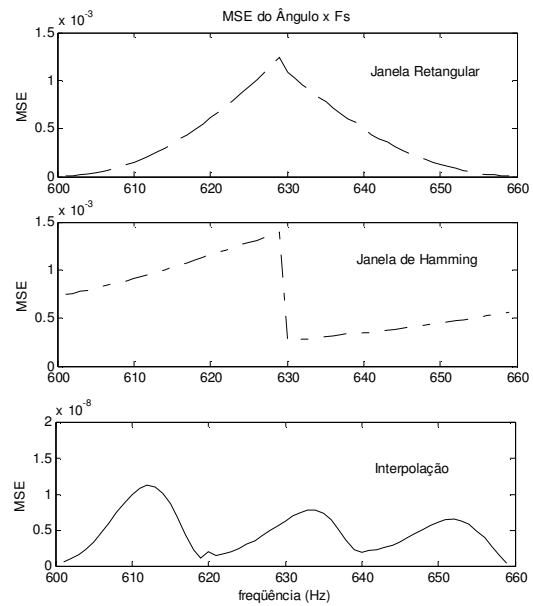


Figura 12: Gráfico MSE do ângulo x Frequência de amostragem. Comparação entre os métodos de janela e a interpolação para um intervalo entre frequência de amostragem múltiplas com a fundamental.

6 REFERÊNCIAS

- [1] E. O. Schweitzer III, D. Hou. "Filtering for protective relays", *47th Annual Georgia Tech Protective Relaying Conference*, Atlanta, Geórgia, 1993. Também pode ser obtido em <http://www.selinc.com/techpprs/techpprs/6041.pdf>.
- [2] S. L. Marple Jr., "*Digital Spectral analysis with Applications*", Prentice-Hall, 1987.
- [3] R. M. Hidalgo, J. G. Fernandez, R. R. Riviera, H. A. Larrondo: "A Simple Adjustable Window Algorithm to Improve FFT Measurements", *IEEE Transaction on Instrumentation and Measurement*, Vol. 51, No. 1, Feb. 2002.
- [5] W. A. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, "*Numerical Recipes*", Cambridge University Press, 1986.
- [4] P. S. R. Diniz, E. A. B. Silva, S. L. Netto, "*Digital Signal Processing*", Cambridge University Press, 2002.
- [6] C. S. Burrus et. al., "*Computer-Based Exercises for Signal Processing Using MATLAB®*", Prentice-Hall International Inc., 1994.
- [7] T. Takagi, Y. Yamakoshi, M. Yamaura, R. Kondow, T. Matsushima, "Development of a New Type Fault Locator the Using One-Terminal Voltage and Current Data", *IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-101 (8), 1982.
- [8] J. Schoukens, R. Pintelon, H. V. Hamme, "The Interpolated Fast Fourier Transform: A Comparative Study", *IEEE Transaction on Instrumentation and Measurement*, Vol. 41, No. 2, Apr. 1992.