

Decomposição de Sinais em Multiresolução com Operadores Morfológicos

Marcello Artimos Neves e Eduardo Antônio Barros da Silva

Resumo—Recentemente, foi proposto um método heurístico para decomposição de sinais em multiresolução usando operadores morfológicos. Entretanto, neste método, a influência do elemento estruturante não foi bem entendida. Neste artigo, investigamos sua influência na qualidade das decomposições geradas, bem como propomos novas alternativas de operações morfológicas, com potencialidade para gerar boas decomposições. Experimentos realizados mostraram que elementos estruturantes pequenos tendem a gerar melhores resultados. Além disso, identificamos requisitos extras que influenciam bastante na qualidade das decomposições geradas.

Palavras-Chave—Decomposição Não-Linear em Multiresolução, Morfologia Matemática.

Abstract—Recently, it was proposed a morphologic non-linear filter bank design method in order to carry out multiresolutions signal decomposition. However, in this method, the influence of the structuring element has not been fully understood. In this article, besides investigating the structuring elements influence, we propose different alternatives for the morphological operators. Experimental results have shown that small structuring elements tend to lead to better results. In addition, we have identified extra requirements for generating good decompositions.

Keywords—Non-Linear Multiresolution Decomposition, Mathematical Morphology.

I. INTRODUÇÃO

Atualmente, há uma maturidade no que diz respeito à teoria de bancos de filtros lineares, havendo várias ferramentas e métodos bastante consolidados para o projeto de tais bancos. Contudo, não há ferramentas e métodos consolidados para o projeto de bancos de filtros não-lineares; recentemente foram propostos em [10], [11], [12] alguns métodos heurísticos, onde o objetivo era a realização de uma decomposição do sinal de entrada em bandas de multiresolução usando operações não-lineares morfológicas. No caso linear discreto, as decomposições em multiresolução são realizadas pelas Transformadas Wavelets Discretas (DWT - *Discrete Wavelet Transforms*) [1], [2].

Os bancos de filtros em [10], [11], [12] utilizavam a estrutura de *lifting* [3] (ou estrutura *lattice*), onde a separação em bandas é realizada em uma sucessão de passos (*lifting steps*). Essa estrutura foi utilizada por garantir reconstrução perfeita qualquer que seja a natureza das operações utilizadas em seus passos: lineares ou não-lineares. Assim, foram utilizadas operações não-lineares morfológicas, gerando os bancos de filtros não-lineares morfológicos.

Marcello Artimos Neves e Eduardo Antônio Barros da Silva, Departamento de Engenharia Eletrônica e de Computação/Escola Politécnica e PEE/COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, E-mails: artimos@lps.ufrj.br, eduardo@lps.ufrj.br.

A morfologia é uma área da matemática que visa extrair ou enfatizar características de sinais que estão intimamente relacionadas com a sua forma, fazendo-se comparações entre estes (os sinais) e uma entidade chamada de elemento estruturante - que desempenha um papel fundamental no resultado da operação morfológica, pois é ele o responsável pelas características preservadas, enfatizadas e/ou descartadas.

Os testes realizados em [10] não permitiram que se entendesse alguns comportamentos anômalos apresentados pelos bancos projetados. Neste trabalho, mais testes foram propostos, com o objetivo de estudar a influência das operações morfológicas e dos elementos estruturantes na qualidade da decomposição gerada. Os resultados obtidos com nossos testes nos permitiram entender e interpretar os comportamentos anômalos, até então sem explicação conhecida.

Como veremos mais tarde, o método heurístico de projeto de banco de filtros morfológicos descrito em [10], [11], [12] pode admitir diversas soluções. A observação das soluções lá encontradas nos permitiu fazer uma proposta de uma nova solução, cujos resultados mostraram desempenho superior aos encontrados em [10] e comparáveis (e algumas vezes melhores) aos de decomposições lineares amplamente usadas na literatura, como a wavelet Daubechies 9-7.

O restante deste trabalho será dividido como se segue: a seção 2 trata da teoria de Bancos de Filtros; a 3 apresenta a Morfologia Matemática e suas operações elementares; a seção 4 apresenta um método heurístico para decompor um sinal em bandas de diferentes resoluções e resultados de testes feitos com um operador morfológico derivado nesta seção; a seção 5 apresenta novos operadores a serem usados com os bancos de filtros morfológicos e alguns testes; as conclusões são apresentadas na seção 6.

II. BANCOS DE FILTROS UNIDIMENSIONAIS

A. Wavelets

Considere um sinal que seja decomposto por um banco de filtros em duas bandas: uma com as frequências mais baixas e a outra com as mais altas. Agora, considere que a banda resultante da filtragem passa-baixa é novamente dividida em duas outras: uma com suas frequências mais baixas e a outra com as mais altas. Se esse processo for repetido N vezes, ou seja, a banda passa-baixa de um estágio de decomposição for dividida em outras duas, e, além disso, os filtros passa-baixa e passa-alta respeitarem certas condições [1], [2], obteremos na saída deste banco de filtros de análise o que chamamos de *transformada wavelet* de N estágios. Os bancos de filtros que implementam o tipo de filtragem anteriormente descrita são chamados de oitavados. A figura 1 mostra um banco de filtros oitavado com três estágios de decomposição.

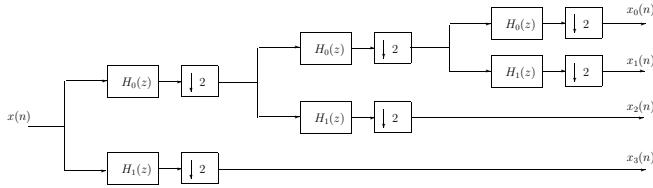


Fig. 1. Banco de filtros oitavado (3 níveis de decomposição): Transformada Wavelet

Um conjunto A está numa resolução mais baixa que um conjunto B se os detalhes (conteúdo freqüencial) de A estiverem localizados em uma faixa de freqüências mais baixas que os detalhes de B . Na figura 1, $x_i(n)$ está numa resolução mais baixa que $x_j(n)$ se $i < j$.

A figura 2 mostra uma forma equivalente de se representar um banco de filtros de 2 canais (são mostradas as etapas de análise e síntese). Nesta figura, $\mathbf{E}(z)$ é uma matriz cujos elementos são definidos por $E_{kj}(z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h_k(Ml + j)z^{-l}$, onde $h_k(n)$ é a resposta ao impulso do filtro de análise $H_k(z)$ e $j, k = 0, 1$. Além disso, $\mathbf{R}(z)$ é uma matriz cujos elementos são definidos por $R_{kj}(z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} g_k(Ml - j + M - 1)z^{-l}$, onde $j, k = 0, 1$ e $g_k(n)$ é a resposta ao impulso do filtro de síntese $G_k(z)$.

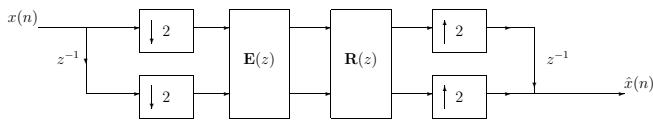


Fig. 2. Representação equivalente de um banco de filtros de 2 canais

Na representação mostrada na figura 2, os sinais encontrados nas saídas dos decimadores são chamados de componentes polifásicas do sinal de entrada. Nos bancos de filtros de dois canais temos duas componentes polifásicas do sinal de entrada: a par e a ímpar, formadas, respectivamente, pelos elementos (do sinal de entrada) localizados em posições espaciais (ou temporais) pares e ímpares.

B. Fatoração de bancos de filtros em passos de lifting

Pode-se mostrar que a matriz $\mathbf{E}(z)$ de um banco de filtros de análise com 2 canais pode ser fatorada conforme a equação 1 abaixo [3]:

$$\mathbf{E}^T(z) = \prod_{i=1}^p \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -S_i(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -T_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{K} & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \quad (1)$$

A equação 1 é chamada de fatoração em passos de *lifting*. As operações $S_i(z)$ e $T_i(z)$ formam o i -ésimo passo de *lifting*, e p é o número total de passos de fatoração.

Neste trabalho, só estaremos interessados na estrutura resultante dessa decomposição, que é mostrada na figura 3 tanto para a etapa de análise quanto para a de síntese. Nesta figura, $x(2n)$ e $x(2n-1)$ são, respectivamente, as componentes polifásicas pares e ímpares do sinal $x(n)$; $x_i(2n)$ e $x_i(2n-1)$ são as componentes polifásicas modificadas após i passos de *lifting*; $\tilde{x}(2n)$ e $\tilde{x}(2n-1)$ são as componentes polifásicas

filtradas, onde, na maioria dos casos práticos, esperamos que a primeira tenha baixas freqüências e a segunda altas.

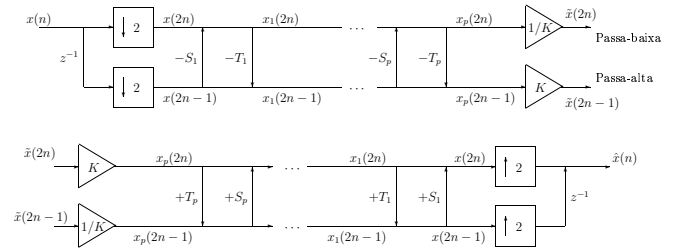


Fig. 3. Lifting na análise (acima) e na síntese (abaixo)

Uma olhada detalhada na estrutura da figura 3 deixa evidente que a reconstrução perfeita, ou seja, $\hat{x}(n) = x(n - \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, pode ser obtida quaisquer que sejam as operações $S_i\{\cdot\}$ e $T_i\{\cdot\}$, sejam elas lineares ou não, desde que apliquemos na síntese os mesmos operadores $S_i\{\cdot\}$ e $T_i\{\cdot\}$ usados na análise, porém na ordem invertida e com sinais contrários. A observação deste fato nos motiva a usar filtros morfológicos nas operações $S_i\{\cdot\}$ e $T_i\{\cdot\}$ com o objetivo de fazermos separação em bandas de freqüências, assim como fazem os filtros lineares.

III. MORFOLOGIA MATEMÁTICA

A morfologia difere da teoria convencional de processamento de sinais por usar a forma e topologia dos mesmos para obtenção das informações e resultados necessários, ao invés de se trabalhar com freqüências ou bandas de freqüências. O seu princípio básico é obter informações sobre a geometria e topologia de um subconjunto desconhecido de uma imagem (ou de outro sinal qualquer) a partir de comparações com um conjunto conhecido e bem definido, chamado elemento estruturante (EE).

Antes de definirmos as operações básicas, será necessária a apresentação da notação a ser utilizada. O EE será denominado B ; B_x representa o EE centrado no ponto x do sistema de coordenadas utilizado; \tilde{B} é o conjunto de vetores pertencentes a B refletidos em relação à origem. Um sinal que possui vários níveis de intensidade (ou níveis de cinza, no caso específico de imagens) é chamado de f . Vale dizer que só usaremos EE do tipo plano (*flat*) [5], ou seja, definidos apenas pela região do espaço que eles ocupam, onde cada elemento desse domínio não está associado a um nível de intensidade. Por fim, EE_k representa o EE unidimensional de comprimento k .

A. Erosão e Dilatação

As operações de erosão e dilatação de um sinal f pelo EE B são definidas, respectivamente, pelas equações 2 e 3 [5]:

$$[\varepsilon_B(f)](x) = \min_{b \in B} f(x + b) \quad (2)$$

$$[\delta_B(f)](x) = \max_{b \in B} f(x + b) \quad (3)$$

É importante dizer que o resultado da erosão tem nível DC (média) menor que do sinal original, enquanto o da dilatação possui nível DC maior.

B. Abertura e fechamento

As equações 4 e 5 definem, respectivamente, as operações de abertura e fechamento por um EE B [5]:

$$\text{abe}_B(f) = f \circ B = \delta_{\tilde{B}}(\varepsilon_B(f)) \quad (4)$$

$$\text{fec}_B(f) = f \bullet B = \varepsilon_{\tilde{B}}(\delta_B(f)) \quad (5)$$

A figura 4 mostra, da esquerda para a direita, um sinal unidimensional digital e os resultados da aplicação da abertura e fechamento sobre este sinal, ambos com um EE de comprimento 3 u.c. (EE3).

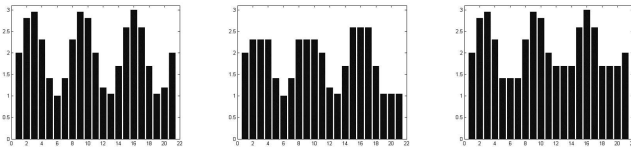


Fig. 4. Esquerda para direita: sinal unidimensional, abertura, fechamento.

As operações de abertura e fechamento suavizam o sinal sobre o qual elas agem, removendo variações bruscas de amplitude: a abertura remove picos cuja largura de base seja inferior ao comprimento do EE, enquanto o fechamento preenche vales cuja abertura seja inferior ao comprimento do EE. Apesar de suavizarem o sinal de entrada, a abertura reduz o nível DC, enquanto o fechamento o aumenta.

IV. DECOMPOSIÇÃO MORFOLÓGICA EM MULTIRESOLUÇÃO

A. Decomposição Unidimensional

Quando fatoramos a matriz $\mathbf{E}(z)$ de um banco de filtros de 2 bandas em passos de *lifting*, as operações $S_i(z)$ e $T_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, p$, resultantes possuem, em geral, as seguintes propriedades:

- a de suavizar o sinal de entrada;
- a de não adicionar nível DC ao sinal sobre o qual elas agem.

Isto pode ser constatado pelos exemplos de fatoração encontrados em [3]. Como queremos imitar as decomposições lineares, devemos usar operadores morfológicos $S_i\{\cdot\}$ e $T_i\{\cdot\}$ que também possuem as propriedades acima.

Vimos na seção III que as operações morfológicas abertura e fechamento suavizam o sinal sobre o qual elas agem, porém diminuem ou adicionam, respectivamente, nível DC. No entanto, uma simples média aritmética entre estas duas operações, definida na equação 6 pelo operador $\mathcal{L}_B\{\cdot\}$, tende a possuir ambas as características.

$$\mathcal{L}_B\{\cdot\} = (\text{abe}_B\{\cdot\} + \text{fec}_B\{\cdot\})/2 \quad (6)$$

Na seção V, vamos sugerir outros operadores morfológicos que possuem as características citadas acima. No momento, continuamos com a exposição do método de decomposição para sinais unidimensionais. Para isso, consideremos que as operações $S_i\{\cdot\}$ e $T_i\{\cdot\}$ podem ser escritas como segue:

$$\begin{aligned} S_i\{\cdot\} &= ms_i S'_i\{\cdot\}, \text{ onde } ms_i \in \mathbb{R} \text{ e } i = 1, 2, \dots, p \\ T_i\{\cdot\} &= mt_i T'_i\{\cdot\}, \text{ onde } ms_i \in \mathbb{R} \text{ e } i = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (7)$$

onde $S'_i\{\cdot\}$ e $T'_i\{\cdot\}$ são filtros baseados em operações morfológicas e que possuem as características supracitadas.

1) *Método de projeto por análise do comportamento para entradas básicas*: A idéia deste método, descrito detalhadamente em [10], [11], [12], é forçar com que a saída da banda passa-alta seja zero para uma entrada com frequência digital 0 e a saída da banda passa-baixa seja zero para uma entrada com frequência π . O projeto consiste em encontrar valores para os ganhos ms_i e mt_i presentes em cada passo de *lifting* (equação 7) de modo que o banco se comporte da maneira acima. Uma vez projetados os valores para tais constantes multiplicativas, podemos escolher S'_i e T'_i como sendo qualquer operador morfológico que tenha as características de suavizar o sinal de entrada e conservar o seu nível DC.

É conveniente chamar a atenção para o fato de que o método admite infinitas soluções para um determinado número de passos de *lifting*.

2) *Generalização das definições de atrasos e adiantamentos*: Na figura 3, supomos que queremos aplicar T_i em $x_i(2n)$ para modificar uma amostra de $x_{i-1}(2n-1)$, gerando $x_i(2n-1)$. Então, devemos seguir o seguinte procedimento (considere $n \geq 0$) [13]:

- Superamostrar a seqüência $\mathbf{x}(2n) = [x(0), x(2), x(4), \dots, x(2k), \dots]$ gerando a seqüência modificada $\mathbf{x}_{mod}(n) = [\rho, x(0), \rho, x(2), \rho, x(4), \rho, \dots, x(2k), \rho, \dots]$, onde ρ é um elemento neutro para a operação morfológica em questão a ser usada. Para a operação de abertura, ρ deve ser $+\infty$, enquanto para a operação de fechamento ρ deve ser $-\infty$; para o caso linear, ρ é 0;
- Aplicar a operação morfológica T'_i em $\mathbf{x}_{mod}(n)$ gerando a seqüência $\mathbf{x}_{trans}(n) = [x_{trans}(-1), x_{trans}(0), x_{trans}(1), x_{trans}(2), \dots, x_{trans}(k), \dots]$;
- O resultado deve ser subamostrado nas posições das amostras que pretendemos modificar, ou seja, em $-1, 1, 3, 5, \dots, 2k-1, \dots$;

No caso em que desejamos aplicar as operações S_i , devemos, analogamente ao exposto acima, criar uma seqüência \mathbf{x}_{mod} inserindo o elemento neutro nas posições convenientes para, então, aplicar a operação morfológica. O resultado deve ser obtido subamostrando a seqüência \mathbf{x}_{trans} nos instantes das amostras que pretendemos modificar.

B. Testes com o operador morfológico $\mathcal{L}_B\{\cdot\}$

A tabela I mostra duas soluções encontradas em [10] com o método descrito na seção IV-A, as quais são chamadas de projeto 1 e projeto 2. Repare que os projetos apresentam duas soluções diferentes para o método, ambas contemplando 2 passos de *lifting*.

Para concluir sobre a qualidade dos bancos projetados, utilizamos o algoritmo de compressão de imagens EZW [9], onde a DWT (linear) foi substituída pela decomposição em

TABELA I
PROJETOS DE BANCOS DE FILTROS

	ms_1	mt_1	ms_2	mt_2	K
projeto 1	0,0	1,0	-0,5	0,0	$1/\sqrt{2}$
projeto 2	0,0	1,1	-0,476190	-0,1050	0,742462

multiresolução morfológica projetada. As imagens transformadas foram codificadas com taxas de 0,15bpp e 0,50 bpp. As imagens reconstruídas (síntese) foram comparadas à original, onde utilizamos a PSNR (*Peak Signal to Noise Ratio*) como medida de qualidade objetiva.

Para decompor a imagem teste (Lena, dimensões 512x512, 8 bpp) em bandas de multiresolução, utilizamos filtragem bidimensional separável [7], [8]. Em cada passo de *lifting*, utilizamos o operador morfológico $\mathcal{L}_B\{\cdot\}$ com elementos estruturantes unidimensionais de comprimentos 3 e 5 *pixels* (EE3 e EE5) - onde o uso do EE unidimensional é necessário, pois, em se tratando de filtragem bidimensional separável, os filtros aplicados nas linhas e colunas devem ser unidimensionais. Foram usados 5 níveis de decomposição (figura 1).

As figuras 5 e 6 foram obtidas com o uso do projeto 1. A primeira mostra a imagem Lena após codificação/decodificação (com EZW) com uma taxa de 0,15bpp, onde foi usado EE3. A segunda só difere da primeira pelo uso do EE5. Podemos ver que o uso do EE5 fez com que a imagem recuperada apresentasse alguns artefatos (riscos horizontais e verticais) que não estavam presentes quando usamos EE3; estes defeitos são equivalentes ao efeito de *ringing* apresentado no caso linear. Não apresentaremos imagens referentes ao projeto 2, pois são muito semelhantes às encontradas nas figuras 5 e 6, mas alguns resultados em termos de PSNR são encontrados na tabela III.

Após vários testes, foi observado que tais artefatos realmente só apareciam quando usávamos elementos estruturantes de comprimentos grandes [13]. Uma explicação para tal fato é que com o uso de EE grandes o cálculo de uma amostra é feito baseado em vizinhos muito afastados espacialmente; esse efeito é ainda mais relevante nos estágios superiores de decomposição, pois como as imagens nestes estágios possuem resolução mais baixa - por terem sido subamostradas várias vezes - os vizinhos usados para fazer um cálculo podem corresponder, na imagem original, a amostras situadas em posições bastante afastadas. Deste modo, quando uma banda de um estágio superior é quantizada, o erro de quantização - que será tanto maior quanto pior for a estimação (modificação) feita nos passos de *lifting* - se propaga cumulativamente por todos os estágios inferiores durante o processo de recuperação (síntese) da imagem. Esse efeito cumulativo se apresenta visualmente como tais riscos verticais e horizontais.

Observando atentamente os coeficientes ms_i e mt_i do projeto 1, vemos que eles são idênticos aos resultantes da fatoração da wavelet de Haar encontrada em [3]. Esse fato nos motivou a investigarmos a qualidade da decomposição morfológica obtida com o uso dos coeficientes resultantes da fatoração da wavelet Daubechies 9-7 [3], apenas substituindo os interpoladores lineares - $\frac{1+z}{2}$ e $\frac{1+z^{-1}}{2}$ - encontrados nesta fatoração pelo operador morfológico $\mathcal{L}_B\{\cdot\}$ [13]. Esses coeficientes são dispostos na tabela II e os chamaremos de projeto



Fig. 5. Imagem recuperada com o uso do projeto 1 e operador $\mathcal{L}_B\{\cdot\}$. Características: 5 níveis de decomposição, EE3, 0,15bpp.



Fig. 6. Imagem recuperada com o uso do projeto 1 e operador $\mathcal{L}_B\{\cdot\}$. Características: 5 níveis de decomposição, EE5, 0,15bpp.

3.

Com o objetivo de comparar as diferentes soluções e a influência do EE, reunimos na tabela III os resultados obtidos com os diversos testes realizados com o operador $\mathcal{L}_B\{\cdot\}$. Observando os valores de PSNR da tabela, concluímos que o projeto 3 apresenta resultados melhores em todas as situações. Este fato sugere que podemos usar a fatoração em passos de *lifting* de bons filtros lineares como ponto de partida para um bom projeto de decomposição morfológica em multiresolução. Além disso, como já comentado anteriormente, o uso de EE de menor comprimento gera melhores resultados.

Um fato que julgamos importante enfatizar é que os resultados obtidos neste trabalho com o uso de elementos estruturantes planos foram melhores que os obtidos em [10] com

TABELA II
FATORAÇÃO DA WAVELET DAUBECHIES 9-7.

	ms_1	mt_1	ms_2	mt_2	ms_3	K
proj. 3	0, 0	3, 172	0, 106	-1, 766	-0, 886	1/1, 149

TABELA III
DECOMPOSIÇÃO SEPARÁVEL UTILIZANDO OPERADOR $\mathcal{L}_B\{\cdot\}$.

projeto	EE (u.c.)	taxa (bpp)	PSNR (dB)
1	3	0,15	30,5553
1	5	0,15	27,3731
1	3	0,50	35,5609
2	3	0,15	30,5653
2	3	0,50	35,2565
3	3	0,15	30,8488
3	5	0,15	27,4456
3	3	0,50	36,4073

o uso de elementos estruturantes não-planos. Isto acontece, pois os EE não-planos fazem com que o resultado de uma operação morfológica em uma dada posição seja influenciado por valores de amostras **distantes**, se assemelhando ao uso de EE **planos** com comprimento **grande**, o que, como já foi visto, gera resultados ruins. Na verdade, observando fatorações de diferentes filtros lineares em passos de *lifting*, notamos que as operações S_i e T_i geradas são, em geral, filtros FIR de ordem 1, o que se assemelha, no caso morfológico (após a superamostragem com o elemento neutro da operação em questão), ao uso de EE planos de comprimento 3. Note que esse entendimento não era claro em [10].

Na tabela IV, podemos encontrar alguns valores de PSNR obtidos com o uso da decomposição linear resultante da wavelet Daubechies 9-7 e com o uso da decomposição não-linear resultante do projeto 3, onde, neste último caso, foi utilizado o EE3, por ser o que apresenta os melhores resultados. A wavelet Daubechies 9-7 foi escolhida para comparação por ser uma das mais utilizadas na literatura e uma das que apresenta melhores resultados quando utilizada com o EZW. Observando a tabela, vemos que, em parte dos testes realizados, os resultados obtidos com os bancos de filtros morfológicos foram melhores que aqueles gerados pelo banco de filtros lineares. Esse é um resultado surpreendente e é uma outra contribuição importante deste trabalho, pois deixa evidente que o método de decomposição proposto em [10], [11], [12] é capaz de gerar resultados tão bons e, às vezes, até melhores - em termos de PSNR - que os conseguidos com o uso de boas decomposições lineares, como é o caso da DWT Daubechies 9-7. A qualidade subjetiva das imagens recuperadas também é equivalente.

TABELA IV
WAVELET DAUBECHIES 9-7 (LINEAR) X DECOMPOSIÇÃO MORFOLÓGICA
OBTIDA COM O PROJETO 3.

níveis decomp	bpp	PSNR (projeto3)	PSNR (Daub. 9-7)
5	0,15	30,85	31,01
5	0,50	36,41	36,14
6	0,15	31,18	30,85
6	0,50	35,96	36,05

V. TESTES COM NOVOS OPERADORES

Nesta seção, vamos propor outros operadores que possuem as propriedades de suavização e conservação do nível DC.

A. Os operadores $abefec_B$, $fecabe_B$ e \mathcal{G}_B

Os operadores $abefec_B(\cdot)$ e $fecabe_B(\cdot)$, baseados nas operações morfológicas elementares abertura e fechamento, são definidos na equação 8 abaixo:

$$\begin{aligned} abefec_B(f) &= abe_B(fec_B(f)) \\ fecabe_B(f) &= fec_B(abe_B(f)) \end{aligned} \quad (8)$$

Esses operadores podem ser ordenados como na equação 9 [4]. Como podemos ver nesta equação, os resultados da aplicação das operações $abefec_B$ e $fecabe_B$ ao sinal de entrada e este próprio não podem ser ordenados, o que sugere que pode haver conservação de nível DC. Alguns testes foram feitos com esses operadores, onde notamos que a imagem reconstruída sempre possuía alguns efeitos de bloco. Isto acontece pois, apesar de, em várias aplicações do operador escolhido, a média dos níveis DC dos sinais resultantes provavelmente ser próxima à média dos níveis DC dos sinais de entrada, não podemos garantir que, em cada aplicação, haverá manutenção do nível DC.

$$fec_B \geq \left\{ \begin{array}{c} abefec_B \\ fecabe_B \\ f \end{array} \right\} \geq abe_B \quad (9)$$

Assim, propomos um novo operador morfológico, denotado por $\mathcal{G}_B\{\cdot\}$, definido na equação 10 como uma simples média aritmética entre as operações $abefec_B$ e $fecabe_B$. Ele certamente é suavizador e, além disso, tende a conservar o nível DC do sinal de entrada em cada aplicação.

$$\mathcal{G}_B(f) = \frac{abefec_B(f) + fecabe_B(f)}{2} \quad (10)$$

Os resultados gerados com o uso de $\mathcal{G}_B(\cdot)$ são muito semelhantes aos encontrados com o $\mathcal{L}_B(\cdot)$, tanto em termos subjetivos (visuais) quanto em objetivos (PSNR). Na verdade eles foram um pouco melhores quando foi usado EE5, enquanto que com o uso de EE3 permaneceram idênticos.

B. O operador $Lomo_B$

O operador $Lomo_B$, definido na equação 11, foi originalmente proposto em [6] para ser usado em aplicações que necessitam de processamento de sinais baseado em espaço de escala. Nesta equação, o sinal \leftarrow significa repetir iterativamente a aplicação do lado direito ($\mathcal{L}_B = \frac{abe_B + fec_B}{2}$) até a indeterminância.

$$Lomo_B(f) \leftarrow \frac{abe_B(f) + fec_B(f)}{2} \quad (11)$$

Nos testes, notamos que a aplicação de $Lomo_B$ com EE3 gerou artefatos semelhantes aos encontrados quando usamos \mathcal{G}_B com EE5. Esse resultado causa alguma surpresa, pois o operador $Lomo_B$ é o que melhor satisfaz a propriedade de

manutenção do nível DC. Entretanto, acompanhando atentamente o resultado de cada iteração feita na equação 11 até que a convergência seja alcançada, esse fenômeno pode ser explicado. Na figura 7(a), um sinal original f é mostrado. As figuras 7(b), 7(c) e 7(d) apresentam, respectivamente, os resultados na 1ª, 2ª e 7ª iterações da operação $\mathcal{L}_B = \frac{abc_B(f) + fec_B(f)}{2}$ com EE3 (repare que a 7ª iteração já está muito próxima da convergência). A figura 7(e) mostra o resultado de uma aplicação da operação $\mathcal{L}(f)$ com EE5. Podemos ver nas figuras que a aplicação de $Lomo_B3$ gera picos e vales da mesma altura que \mathcal{L}_B5 . Por outro lado, o operador $Lomo_B$ - ao contrário do \mathcal{L}_B - suaviza o sinal original tornando planos seus picos e vales; por isso, ele altera sua forma, resultando numa pior suavização (observe que o operador \mathcal{L}_B não altera a forma dos picos e vales, apenas a suaviza). Esses dois pontos de vista justificam o aparecimento dos artefatos e fazem com que os resultados em termos de PSNR sejam piores.

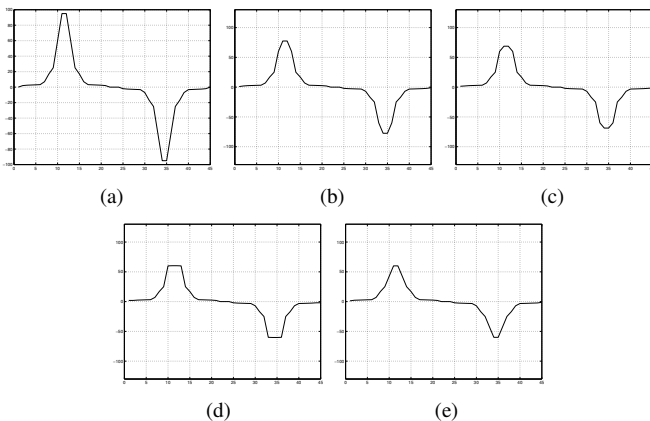


Fig. 7. Aplicação do operador $\mathcal{L}_B\{\cdot\}$ iterativamente. (a) Sinal original. (b) 1ª iteração com EE3. (c) 2ª iteração com EE3. (d) 7ª iteração com EE3. (e) 1ª iteração com EE5.

C. O operador Mediana_B

Um outro operador que poderíamos usar nos bancos de filtros projetados seria aquele que calcula a mediana entre um conjunto de valores. Porém, esse operador apresenta algumas dificuldades. A primeira delas é que não é possível definir um elemento neutro ρ para ser usado na superamostragem presente nas operações generalizadas de atraso e adiantamento (IV-A.2). Poderíamos pensar em não usar os atrasos e adiantamentos no cálculo de $S_i\{\cdot\}$ e $T_i\{\cdot\}$, mas, mesmo assim, teríamos uma segunda dificuldade: como a mediana só é definida para um número ímpar de elementos, o menor número de amostras de um sinal intermediário de uma banda que poderíamos usar para calcular o valor de uma dada posição seria 3, e isto é semelhante ao uso de um operador morfológico com EE5 (numa polifásica - ou sinal intermediário de uma banda - interpolada com elemento neutro) que, como já sabemos, não oferece bons resultados. Estas dificuldades nos desmotivaram a testar tal operador.

Os testes realizados nesta seção mostram que o operador $\mathcal{L}(\cdot)$ é o que apresenta os melhores resultados quando usado EE de tamanho 3, mesmo sendo o de menor complexidade computacional. Por isso, não se justifica o uso dos demais operadores.

VI. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho, propusemos novas alternativas de operadores morfológicos (com elementos estruturantes - EE - de diversos tamanhos) para serem usados no método descrito em [10], [11], [12] que realiza decomposição morfológica de sinais em bandas de multiresolução.

Os testes foram feitos substituindo a DWT presente no algoritmo EZW pela decomposição morfológica com as novas alternativas de operadores. Concluímos que EE grandes geram piores decomposições devido a estimativas ruins no cálculo de cada amostra. Assim, as bandas de cada resolução (principalmente as mais baixas) não representam bem o conteúdo presente no sinal original, fazendo com que os erros resultantes da quantização - que são tanto maiores quanto maior o EE -, quando propagados pelas bandas de maior resolução durante o processo de recuperação (síntese) da imagem quantizada/codificada, gera artefatos que reduzem o valor de PSNR.

Além dos projetos encontrados em [10], fizemos uma nova proposta - baseada na fatoração em passos de *lifting* da Wavelet Daubechies 9-7 - que gerou resultados tão bons quanto os encontrados com as decomposições lineares mais usadas na literatura. Isto nos motiva, num trabalho futuro, a propor um novo método de projeto de bancos de filtros não-lineares usando ferramentas disponíveis para o caso linear.

Posteriormente, esperamos que novos métodos de projeto possam ser desenvolvidos com sucesso e que possamos estudar suas características e propriedades de modo menos heurístico e mais formal. Além disso, tentaremos fazer uso de outros operadores que possuem a propriedade de auto-dualidade, como os *levelings* [5].

REFERÊNCIAS

- [1] P. S. R. Diniz and E. A. B. da Silva and S. L. Netto, *Digital Signal Processing: System Analysis and Design*. Cambridge University Press, 2003, 1ª edição.
- [2] P. P. Vaidyanayhan, *Multirate Systems and Filter Banks*. Prentice Hall, 1993.
- [3] I. Daubechies and W. Sweldens, "Factoring Wavelet Transforms into Lifting Steps", *Bell Laboratories - Lucent Technologies*, 1996.
- [4] J. Facon, *Morfologia Matemática: Teoria e Exemplos*. Editora Universitária da PUC do Paraná, 1996, 1ª edição.
- [5] P. Soille, *Morphological Image Analysis: Principles and Applications*. Springer, 1999, 2ª edição.
- [6] J. H. Bosworth and S. T. Acton, "Morphological Scale-Space in Image Processing", *Digital Signal Processing*, v. 13, 2003.
- [7] A. K. Jain, *Fundamentals of Digital Image Processing*. Prentice Hall International, 1989.
- [8] K. Sayood, *Introduction to Data Compression*. Morgan Kaufmann, 2000, 2ª edição.
- [9] J. M. Shapiro, "Embedded Image Coding using Zerotrees of Wavelet Coefficients", *IEEE Transaction Signal Processing*, v. 41, p. 3445-3462, Dezembro 1993.
- [10] E. S. Cardoso Jr, *Compressão de Imagens Utilizando Decomposições em Multiresolução Morfológicas*. Tese de Mestrado, COPPE-UFRJ, 1999.
- [11] E. S. Cardoso Jr and E. A. B. da Silva, "Design of nonlinear multi-resolution decomposition schemes using morphological operations", *Electronics Letters*, v. 36, p. 843-845, 27 Abril 2000.
- [12] E. S. Cardoso Jr and E. A. B. da Silva, "Design of non-linear multi-resolution decompositions with applications to image compression", *ISCAS*, v. 2, Maio 2001 Pages:493 - 496 vol. 2.
- [13] M. A. Neves, *Decomposição Morfológica de Sinais em Multiresolução*, www.lps.ufrj.br/~artimos/ProjetoFinal.ps. Projeto Final, DEL-UFRJ, 2003.